Chambre de Commerce et d'Industrie de Paris

DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT

SERVICE DES CONCOURS ET EXAMENS

Ecole des Hautes Etudes Commerciales

CONCOURS D'ADMISSION DE 1981

Composition de Mathématiques

1re EPREUVE

Vendredi 15 Mai 1981, de 8 heures à midi

Les trois parties sont indépendantes

On désigne par R_+ l'ensemble des réels positifs, R_- celui des réels négatifs, R_+^* celui des réels strictement positifs. On se donne $\alpha \in R_+^*$ et une application continue f de R_+ dans R_+^*.

PREMIÈRE PARTIE

Soit X une variable aléatoire réelle, définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de fonction de répartition F. On suppose que F est continue, nulle sur R_-, dérivable sur R_+^*. On suppose, en outre, qu'on a la relation:

$$\forall\, t \in R_+^*,\ \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{1}{h} P\,(X \leqslant t+h / X \geqslant t) = f(t)[\,P\,(X \leqslant t)\,]^{\alpha},$$

(on note P (A) la probabilité de A, P (A/B) la probabilité conditionnelle de A sachant B).

1° Montrer que F vérifie : $\forall\, t \in R_+^*,\ F'(t) = f(t)[F(t)]^{\alpha}[1-F(t)]$ (1)

(F'(t) est la dérivée de F au point t).

2° Montrer que F est dérivable à droite en 0 et donner $F_d'(0)$.

DEUXIÈME PARTIE

On désigne maintenant par F une application de R_+ dans [0,1[, dérivable sur R_+, vérifiant (1) et la condition supplémentaire: $x=0 \Leftrightarrow F(x)=0$.

1° Montrer que F est strictement croissante, et admet une limite finie $L \in]\,0,\ 1]$ à l'infini.

2° Soit $x > 0$.

a) Montrer que l'application H définie sur $]\,0, x\,]$ par :

$$H(y) = \int_{F(y)}^{F(x)} \frac{dt}{t^{\alpha}(1-t)} - \int_y^x f(t)dt$$ est dérivable sur $]\,0, x\,]$ et calculer $H'(y)$.

b) Montrer que l'intégrale impropre $\int_0^{F(x)} \frac{dt}{t^{\alpha}(1-t)}$ est convergente et vaut $\int_0^x f(t)\,dt$.

En déduire que $\alpha < 1$.

c) Que dire de $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ si $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$?

3° a) Montrer que, si α est rationnel, un changement de variable simple ramène le calcul de $\int_0^{F(x)} \frac{dt}{t^{\alpha}(1-t)}$ à l'intégration d'une fraction rationnelle.

b) Si $\alpha = \frac{1}{2}$, montrer que $F(x) = \mathrm{th}^2\left(\frac{1}{2}\int_0^x f(t)\,dt\right)$. Examiner le cas où $f(x) = \frac{1}{x+1}$.

4°) Soit $G : [0, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $G(x) = \int_0^x \frac{dt}{t^2(1-t)}$.

a) En calculant $G(x) = \int_0^x \frac{dt}{t^2}$, et en utilisant l'identité $\frac{1}{1-t} = 1 + t + \ldots + t^n + \frac{t^{n+1}}{1-t}$, donner un développement limité, en 0, à l'ordre n, de $x^{\alpha-2} G(x) - \frac{1}{x(1-x)}$.

b) En déduire, si $f(0) \neq 0$, un équivalent simple de $F(x)$ au voisinage de 0.

5°) Montrer les inégalités :

$$\forall x \in [0, 1[,\ \mathrm{Log}\left(\frac{1}{1-x}\right) \leqslant G(x) < \mathrm{Log}\left(\frac{1}{1-x}\right) + \frac{1}{1-x}.$$

En déduire, pour $x \in \mathbb{R}_+$, l'encadrement :

$$1 - e^{\frac{1}{1-x} - \int_0^x f(t)\,dt} < F(x) \leqslant 1 - e^{-\int_0^x f(t)\,dt}.$$

6°) Montrer que, si $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge, F est la restriction à $\mathbb{R}_-$ de la fonction de répartition d'une certaine variable aléatoire.

TROISIÈME PARTIE

Soit x_0 fixé dans $]0, 1[$. On étudie dans cette partie la fonction g de la variable réelle z définie par :

$$g(z) = \int_0^{x_0} \frac{t^z\,dt}{1-t}.$$

1°) Montrer que le domaine de définition de g est $]-1, +\infty[$.

Calculer $g(0)$, $g(1)$, et plus généralement $g(n)$ pour n entier naturel.

2°) a) Montrer que g est décroissante sur $]-1, +\infty[$.

b) Montrer les inégalités: $\frac{x_0^{z+1}}{z+1} \leqslant g(z) \leqslant \frac{x_0^{z+1}}{(z+1)(1-x_0)}$, en déduire le comportement de g quand z tend vers -1 ou vers $+\infty$.

c) En déduire que la série $\left(\sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{k} x_0^k\right)$ est convergente, et donner sa somme.

3°) Montrer que les intégrales $\int_0^{x_0} \frac{t^z\,\mathrm{Log}\,t}{1-t}\,dt$ et $\int_0^{x_0} \frac{(\mathrm{Log}\,t)^2 t^z}{1-t}\,dt$ existent si $z > -1$ (on ne cherchera pas à les calculer).

4°) Soit $a > -1$, et z fixé dans $]a, +\infty[$. Soit h, variable, non nul, tel que $z + h > a$.

a) Montrer, qu'à chaque h, on peut associer une application θ, à valeurs dans $]0, 1[$, telle que :

$$\frac{1}{h}(g(z+h) - g(z)) - \int_0^{x_0} \frac{t^z\,\mathrm{Log}\,t}{1-t}\,dt = \frac{h}{2}\int_0^{x_0} \frac{(\mathrm{Log}\,t)^2\, t^{z+\theta(t)h}}{1-t}\,dt;$$

on pourra utiliser, après l'avoir justifiée, l'égalité: $t^h - 1 - h\,\mathrm{Log}\,t = \frac{h^2}{2}(\mathrm{Log}\,t)^2\, t^{h\vartheta}$ pour un $\vartheta \in]0, 1[$.

b) En déduire que g est dérivable en z et donner $g'(z)$.

c) Où g est-elle dérivable ?

5°) Tracer l'allure du graphe de g en repère orthonormé.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail